異方性弾性板の二次元混合境界値問題に関する理論的研究

著者	鎌田 武司
号	129
発行年	1967
URL	http://hdl.handle.net/10097/8865

氏　名（本籍）	鎌　田　武　司（山梨県）
学位の種類	工　学　博　士
学位記番号	工　博　第　129　号
学位授与年月日	昭和43年3月26日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専門課程	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）機械工学専攻
学位論文題目	異方性弾性板の二次元混合境界値問題に関する理論的研究
論文審査委員	（主査） 教授　玉手　統　教授　斎藤　秀雄 教授　渥美　光　教授　八巻　昇

論文内容要旨

序　論

方向によって弾性的性質が変化するいわゆる異方性弾性体についての理論は等方弾性体におけるよりも弾性定数の数が多いためその理論構成が複雑となるが，異方性材料特有の弾性的挙動を調べることは理論的にも興味があり，実用的にも強く要求されるところであって，異方性弾性体に関する数多くの研究成果をみることができる。しかしこれらの多くは境界曲線上のいたるところで表面力または変位が指定されているいわゆる第1種または第2種の境界値問題に属するものであって，境界曲線上の一部で表面力を他の部分で変位を指定する混合境界値問題の研究は極めて少なく，十分な理論体系はいまだ整えられていないように思われる。

異方性弾性体の二次元混合境界値問題は一般に2個の関数よりなる連立のHilbert 問題を

解くことに帰着されるが，これに簡単な操作をほどこすと問題は1個の関数からなるHilbert問題に変換されるので，解析の手続きは等方性材料にたいする場合に類似となり簡単となる。

このことに着目して，本報告では半無限領域（第1部）およびだ円領域（第2部）を占める異方性弾性体にたいする二次元混合境界値問題を取上げ，それぞれの領域にたいして一般解を誘導すると共にいくつかの実用的具体例を付した。

境界条件として変位の指定を受ける区間が2個以上の混合境界値問題を解く際に，ある種の特殊の定積分の値を求める必要性が生ずるが，従来は十分な精度をもったこの種積分値の算出が困難であった。第8章ではこの積分値を交項級数の形であらわし，この級数の各項の値を高速高容量の電子計算機を用いて求めることによって所望の精度を持つ積分値を決定しうることを示した。

第1部　半無限領域にたいする二次元混合境界値問題

第1章　半無限領域にたいする一般解

弾性体に作用する外力が対称面を持ち，この面が異方弾性体の弾性対称面の一つに一致するときには問題を二次元として扱うことができる。このような状態にある弾性体を二次元異方性体と呼ぶことにする。上記対称面をZ平面（$Z=x+iy$）にとる。Z平面の下半面（$y<0$）の半無限領域を占める均質な二次元異方性弾性体はその直線境界L（$y=0$）上のn個の区間$L'=a_k b_k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, n$）で変位$p(x)$を指定されており，その他の部分L''では外力が働かないものとする。このような問題はL'にそって切断の入った面で正則であり，L'上で次式を満足する関数$h'(\zeta)$，$k'(\zeta)$を求めることに置換えられる。

$$
\begin{aligned}
&Qh'^{+}(x)+Rk'^{+}(x)+Ph'^{-}(x)+Rk'^{-}(x)=-2p'(x)\\
&\bar{R}h'^{+}(x)+Pk'^{+}(x)+\bar{R}h'^{-}(x)+Qk'^{-}(x)=2\overline{p'(x)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここでP，Q，Rは弾性定数によってきまる定数であり，$p'(x)$はL'上でHölderの条件を満足するものとする。式(1)は2個の関数からなるHilbert 問題であるが，これを次のような形に書きなおすことができる。

$$
\begin{aligned}
&[h'^{+}(x)+\lambda_j k'^{+}(x)]+\kappa_j[h'^{-}(x)+\lambda_j k'^{-}(x)]=-2[p'(x)+\lambda_j\overline{p'(x)}]\\
&\quad/(Q-\lambda_j\bar{R})\;(j=1,\ 2)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

λ_j，κ_jはP，Q，Rによってあらわされる定数である。したがって問題の解は式(2)を満足する解として次のような形であらわされる。

$$h'(\zeta)+\lambda_j k'(\zeta)=-\frac{2}{Q-\lambda_j \bar{R}}\frac{X_j(\zeta)}{2\pi i}\int_{L'}\frac{p'(x)+\lambda_j \overline{p'(x)}}{X_j(x)(x-\zeta)}dx+P_j^{(n)}(\zeta)X_j(\zeta) \tag{3}$$

$$X_j(\zeta)=\prod_{k=1}^{n}(\zeta-a_k)^{-\gamma_j}(\zeta-b_k)^{\gamma_j-1},\quad P_j^{(n)}(\zeta)=\sum_{l=0}^{n}D_j^{(l)}\zeta^l \tag{4}$$

$$\gamma_j=(1/2)+i(-1)^j\beta,\quad \beta=(\ln\kappa)/2\pi$$

第２章　境界の一部を固定された異方性半無限板の引張り

第１章で取扱った問題の具体的な例題として，直線境界上 $|x|<a$ なる区間に剛体材料を接着した異方性半無限板が無限遠方で境界に平行に引張られる場合を取上げ，有限項で表わされる解 $h'(\zeta)$，$k'(\zeta)$を導いた。ついで数値計算を行ない，接着縁応力におよぼす異方性の影響を調べた。

第３章　クラックを有する異質異方性無限板の引張り

第１章で用いた解法を応用して，弾性定数が異なる２個の異方性半無限板がそれらの直線縁の有限個の区間にそって相互に接着され，無限遠方で引張りを受ける問題について有限項で表わされた解を得た。ついで接着区間が１または２個所の場合について基本的な荷重条件のもとにおける接着部およびその近傍の応力状態を明らかにした。

第２部　だ円領域にたいする二次元混合境界値問題

第４章　だ円領域にたいする一般解

Ｚ平面の原点に中心をもち座標軸にそった主軸の長さが２ａ，２ｂであるようなだ円Ｌは次のようにあらわされる写像関数によって ζ 平面の単位円 Λ に移される。

$$Z=(b/2)\{(1+\varepsilon)\zeta-[(1-\varepsilon)/\zeta]\},\quad \varepsilon=a/b \tag{5}$$

したがってだ円Ｌの外部領域を占める二次元異方性弾性体がそのだ円境界Ｌ上のｎ個の区間 $L'_k=a_kb_k$ で変位 $p(t)$（ｔはＬ上の点）を指定されているときの解は第１章におけると同様な手続きを経て次のような形であらわされる。ただし境界Ｌ上の他部分 L'' は自由縁であるとする。

$$h'(\zeta)+\lambda_j k'(\zeta)=-\frac{1}{Q-\lambda_j \bar{R}}\frac{Z_j(\zeta)}{2\pi i}\int_{\Lambda'}\frac{q'(\sigma)-\lambda_j\sigma^{-2}\overline{q'(\sigma^{-1})}}{Z_j(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma+R_j^{(n)}(\zeta)Z_j(\zeta) \tag{6}$$

$$Z_j(\zeta)=\prod_{k=1}^{n}(\zeta-\alpha_k)^{-\gamma_j}(\zeta-\beta_k)^{\gamma_j-1},\quad R_j^{(n)}(\zeta)=\sum_{l=-2}^{n}D_j^{(l)}\zeta^l \tag{7}$$

ただし $2p(t)=q(\sigma)$ ，σ は単位円 Λ 上の点である。

異方性弾性体がだ円Lの内部領域を占めるときはだ円領域内に2個の焦点を結ぶ線分にそう切断を仮想し，この切断を有するだ円領域を同心円環に移して，次の形に解を求めた。ただしここでは $\gamma_j=(1/2)-i'(-1)^j\beta$ である。

$$h'(\zeta)+\lambda_j k'(\zeta)=-\frac{1}{P-\lambda_j\bar{R}}\frac{Z_j(\zeta)}{2\pi i}\int_{\Lambda'}\frac{q'(\sigma)-\lambda_j\sigma^{-2}\overline{q}'(\sigma^{-1})}{Z_j(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma+Z_j(\zeta)\sum_{l=-\infty}^{\infty}D_j^{(l)}\zeta^l \quad (8)$$

第5章　だ円孔の一部が固定された異方性無限板の引張り

だ円孔を有する無限板にたいする混合境界値問題の実例として，だ円孔縁の一部に剛体材料を接着した二次元異方性無限板が無限遠方で一様に引張られる場合を取上げ，いくつかの具体例について解を求め，孔縁に生ずる応力分布の様相およびこの応力分布におよぼす異方性の影響を明らかにした。

第6章　だ円孔を有する異方性無限板の接触問題

だ円孔を有する無限板にたいする混合境界値問題のもう一つの典型的な実例として，だ円孔縁が1または2個の剛体接触子によって圧せられる場合について解を有限項で求め，数値計算を行って，孔縁の応力分布の特長を明らかにした。

第7章　異方性だ円環の接触問題

第4章で用いた解法を応用して，2個のだ円 L_k ($k=1,2$)によってかこまれただ円環領域を占める二次元異方性だ円環がその内外周に相対して配置された2個の剛体接触子によって圧縮される場合を取上げて解析を行った。

だ円環領域を中実だ円領域とだ円孔を有する無限領域との共通領域と考え，これらの領域にたいしてそれぞれ別個に解を求める。次いでこれらの解はこの共通領域では一致すべきであるという条件を用いて解にふくまれる未知定数を決定する。このような方針に従って若干の基本的な場合について数値計算を行ない，境界に生ずる応力を図示した。

第8章　擬だ円積分

境界条件として変位の指定を受ける区間が2個以上の混合境界値問題を解く場合には次のような形の定積分の値を求める必要性が生ずる。

$$S_j = \int_0^{\pi/2} (1-k^2\sin^2\phi)^{(-1)^j/2} \cos[F(\phi)]\, d\phi \quad , \quad 0\leq k<1 \quad , \quad j=1,\ 2 \qquad (9)$$

たゞし$F(\phi)$は区間$0\leq\phi<\pi/2$で1価連続な関数であって，$\lim_{\phi\to\pi/2} |F(\phi)| = \infty$ となるものとする。式(9)の形であらわされる定積分を擬だ円積分と呼ぶことにする。

積分値S_1は被積分関数とϕ軸とでかこまれた部分の面積をもってあらわされ，この被積分関数は積分区間の端の近傍で無限回その符号を変える。したがって積分値S_1は正の面積と負の面積とを交互に加えあわせた結果として与えられることとなり，次の形に書きあらわすことができる。

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_n$$

このBnの値はnがある番号N以上に大きくなると$B_{N+1}>B_{N+2}>B_{N+3}\cdots\cdots\cdots$が成立ち，$Bn\to 0$となるから，式(10)であらわされる級数は収束し，このBnの値を電子計算機によって逐次必要な精度まで求めれば，式(10)によって積分値S_1を決めることが出来る。またS_2も同じ要領で求めればよい。このような手法によりS_jに関する数表を作製した。

結　　　論

異方性弾性体の二次元混合境界値問題は一般に2個の関数よりなる連立のHilbert 問題を解くことに帰着されるが，簡単な操作によってこれを1個の関数からなるHilbert 問題に変換することができるので，等方弾性体にたいするのとほぼ同様の手続きで解がえられる。本報告では特に半無限領域およびだ円領域の場合についてそれぞれ一般解を誘導し，それにもとずいていくつかの実用的具体例を解析し，応力分布におよぼす異方性の影響を指摘した。

また高速高容量の電子計算機を利用することによって擬だ円積分の値を十分な精度で決定しうることを示し，且ついくつかの実例についてその値の数表を作製した。

終りにのぞみ終始懇切な御指導，御鞭撻を賜わりました指導教官玉手統教授に厚く感謝の意を表します。

審 査 結 果 の 要 旨

機械・構造物を構成する材料の中には弾性的異方性を示すものが少なくない。これら部材の応力や変形を解明するための異方弾性体力学は数多くの弾性係数を含み，理論構成が著るしく複雑となる。従って機械・構造物要素の強度設計上重要な問題に対するその適用は等方弾性体力学に比し少ない。特に異方弾性体の混合境界値問題は殆んど未開拓の分野ということができる。

本研究はこのような異方弾性体の二次元混合境界値問題の解析を目的とするもので序論，結論および二部八章からなる。本研究の解析方法の要点は弾性体の境界曲線に適応する新応力関数を導入し，問題の境界条件をＨｉｌｂｅｒｔ 問題に変換することにある。

第１部は最も基本的な半無限領域に関するものである。まず第１章では上述の方法による解法を一般的に論じている。二個の未知関数に関するＨｉｌｂｅｒｔ 問題はその特性値を利用すれば分離可能であることに注目し，特性値の性質につき考察を行っている。次いでこの解法を直線縁の一部が固定された半無限板（第２章），直線接合線上にクラックを有する異質無限板（第３章）の引張り問題に適用し，その応力分布を明確にしている。第３章の結果は材料強度に対する異方弾性連続体力学の手法による数少ない寄与の一つである。

第２部はだ円孔を有する無限領域，中実だ円域およびだ円環を占める異方体に関するものである。この領域は半無限域と共に最も基本的なものの一つであるが，その混合境界値問題に関する研究は未だ知見しない。

中実だ円域を単位円内に等角写像する関数は極めて複雑であるため，本研究ではこれを複連域として取扱うことを試み，具体的な解を得ることに成功している（第４章）。これは適切な方法と考えられる。だ円の外部域の混合境界値問題は上記方法により容易に解析を進め得る。第５, ６章はその具体例を扱ったものである。第７章はだ円環に関するものであり，複連域の混合境界値問題としては僅かに等方同心円環の解があるだけであるので，本研究の貢献は大きいといえよう。第８章はこの種問題に関連ある特殊定積分の数表作製に関するものである。

以上要するに本研究は連立Ｈｉｌｂｅｒｔ 問題の特性値に関する考察，中実だ円域を複連域として処理する操作，複連域に対する解法の拡張などいくつかの適切な創意を織込んで，標記の問題をＨｉｌｂｅｒｔ 問題に変換して解を得る解析法を展開したものであり，また具体的問題にその解法を適用して得られた結果は強度設計に極めて有用な知見を提供している。本研究の弾性工学，強度設計工学への寄与は少なくない。

よって本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。